Karlsruhe Institute of Technology

Mathematische Grundlagen II

Prof. Dr.-Ing. Rüdiger Dillmann

Inhalt

Mathematische Grundlagen 1

- Beschreibung von Objekten und Objektlagen im 3-dim., euklidischen Raum
- Orientierungsbeschreibung mit 3x3-Matrix
- Homogene 4x4-Matrix

Mathematische Grundlagen 2

- Rotation und Translation von Punkten
- Verkettete Lagebeschreibung
- Quaternionen
- Duale Quaternionen

Rotation und Translation von Punkten

- In kartesischen Koordinaten

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

- In homogenen Koordinaten

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & v_x \\ n_y & o_y & a_y & v_y \\ n_z & o_z & a_z & v_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotation und Translation von Punkten

Interpretationen von homogenen 4x4 Matrizen

- Lagebeschreibung eines Koordinatensystems:

$$^{A}H_{B}$$

  - beschreibt die Lage des Koordinatensystems B relativ zum Koordinatensystem A

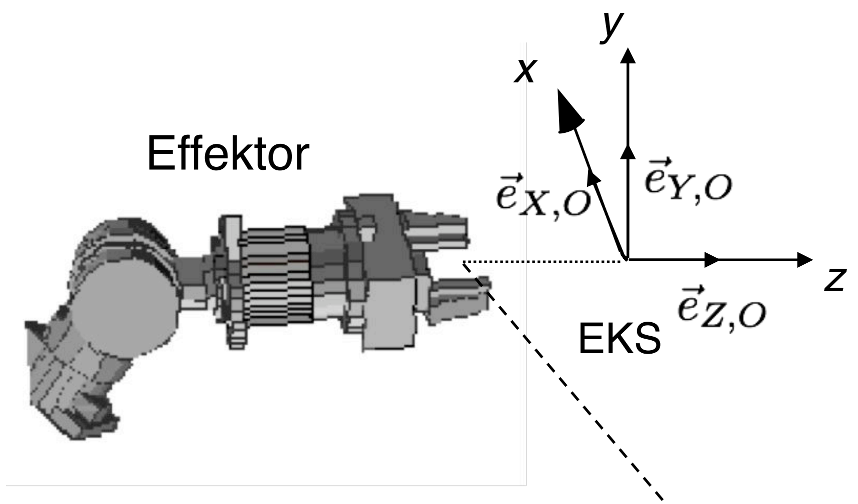
- Transformationsabbildung:

$$^{A}H_{B} : \ ^{B}P \mapsto \ ^{A}P$$

- Transformationsoperator

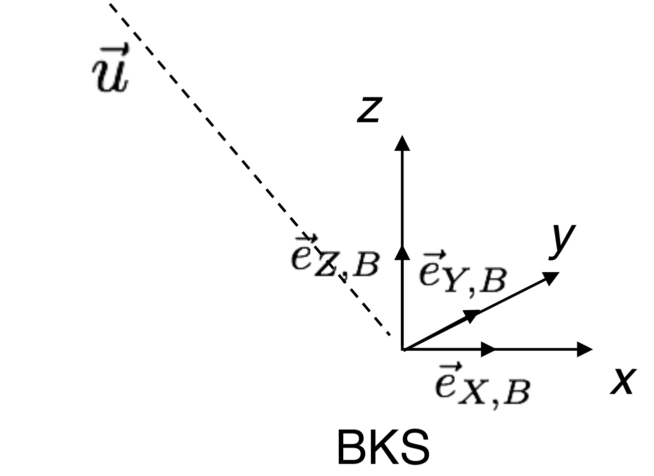
$$H : \ ^{A}P_1 \mapsto \ ^{A}P_2$$

Beispiel



$\vec{u}$ = (-7,0,8)^T,

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



gegeben sei:

Punkt $^{EKS}P = (0,-3,5)^T$

gesucht: ^{BKS}P

Verkettete Lagebeschreibung

- Eine Lagebeschreibung erfolgt häufig nicht in Bezug auf das BKS, sondern bzgl. eines geeigneter erscheinenden Koordinatensystems (relative Definition)

- Umrechnung von Koordinaten auf verschiedene Bezugssysteme (u.a. BKS) notwendig

- Vorteile der relativen Lagedefinition in der Robotik:
  - Verringerung des Nachführaufwandes bei Objektbewegungen
  - Einzelne Koordinatenangaben beschränken sich auf kürzere Distanzen

Verkettete Lagebeschreibung

- Sei ${}^{BKS}\underline{H}_A$ = (4x4) die Lagebeschreibung des Objekts A bzgl. BKS
- Sei ${}^{A}\underline{H}_B$ = (4x4) die Lagebeschreibung eines Objekts B, bezogen auf das OKS von A
- Sei ${}^{BKS}\underline{H}_B$ = (4x4) die Lagebeschreibung des Objekts B bzgl. BKS
- So gilt

$$ {}^{BKS}\underline{H}_B = {}^{BKS}\underline{H}_A \bullet {}^{A}\underline{H}_B $$

Verkettete Lagebeschreibung

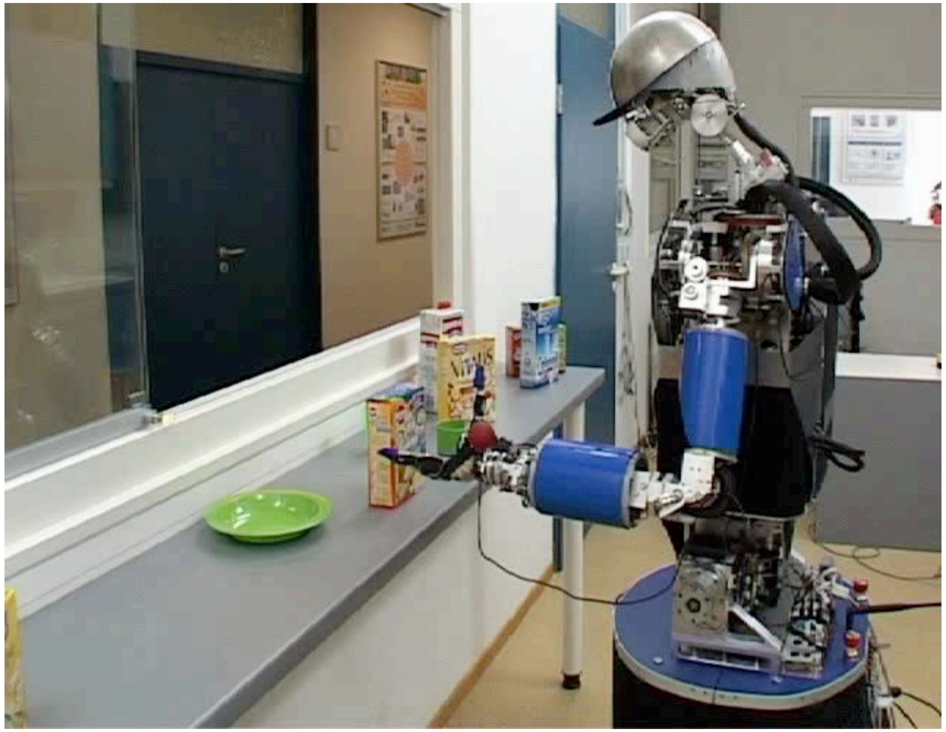
- Sei ${}^{BKS}\underline{H}_A$ = (4x4) die Lagebeschreibung des Objekts A bzgl. BKS
- Sei ${}^{A}\underline{H}_B$ = (4x4) die Lagebeschreibung eines Objekts B, bezogen auf das OKS von A
- Sei ${}^{BKS}\underline{H}_B$ = (4x4) die Lagebeschreibung des Objekts B bzgl. BKS
- So gilt

$$ {}^{BKS}\underline{H}_B = {}^{BKS}\underline{H}_A \bullet {}^{A}\underline{H}_B $$

- Im Vergleich zur kartesischen Darstellung kompaktere Schreibweise:

$$ \underline{R}_{B,neu} + \vec{v}_{B,neu} = \underline{R}_A \cdot (\underline{R}_B + \vec{v}_B) + \vec{v}_A = \underline{R}_A \cdot \underline{R}_B + (\underline{R}_A \cdot \vec{v}_B + \vec{v}_A) $$

Verkettete Lagebeschreibung



Verkettete Lagebeschreibung

- Lage von Objekt 1 bzgl. BKS: ${}^{BKS}\underline{H}_1$
- Lage von Objekt 2 bzgl. Objekt 1: ${}^{O1}\underline{H}_2$
- Lage von Objekt 3 bzgl. Objekt 2: ${}^{O2}\underline{H}_3$
- Lage von Objekt 3 bzgl. BKS: ${}^{BKS}\underline{H}_3$

$$ {}^{BKS}\underline{H}_3 = {}^{BKS}\underline{H}_1 \bullet {}^{O1}\underline{H}_2 \bullet {}^{O2}\underline{H}_3 $$

- Bei einer verketteten Stellungsbeschreibung durch ein Produkt von Matrizen muß jede Matrix sich auf die durch die jeweils links stehende Matrix definierte Stellung beziehen
- Also:

$$ \prod_{i=1}^{n} {}^{\underline{H}_{i-1}}\underline{H}_i \quad \text{mit } \underline{\mathbf{H}}_0 = \text{BKS} $$

Verkettete Lagebeschreibung

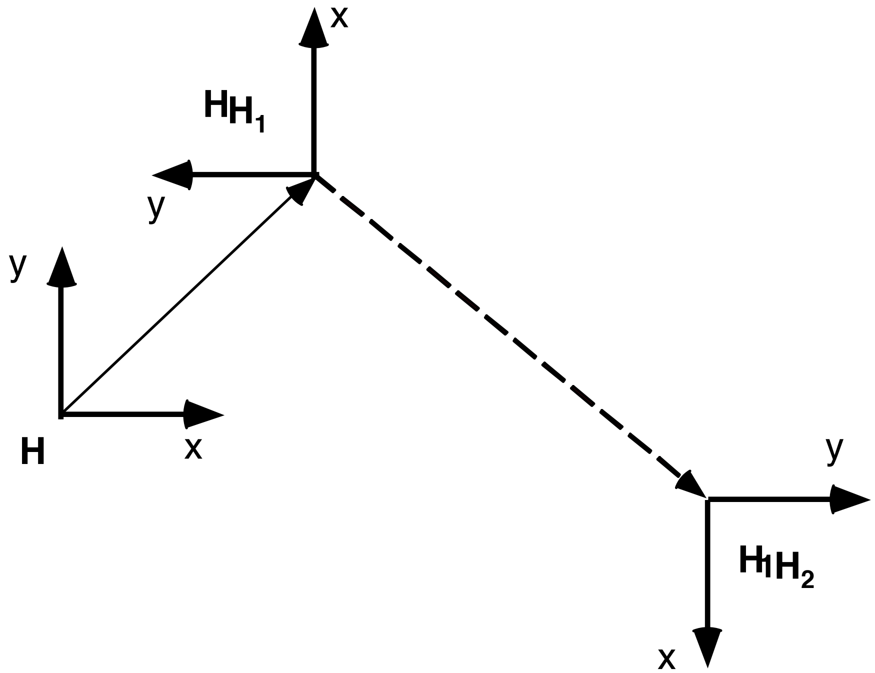
Beispiel

- Objektsystem H_1, entstanden durch eine Transformation $((3,3,0)^T, R_z(90°))$ aus einem beliebigen Bezugsystem B: $^{B}\underline{\mathbf{H}}_{\mathbf{1}}$

- Objektsystem H_2, entstanden durch eine Transformation $((-5,-5,0)^T, R_z(-180°))$ aus dem System des Objekts H_1: $^{H_1}\underline{\mathbf{H}}_{\mathbf{2}}$

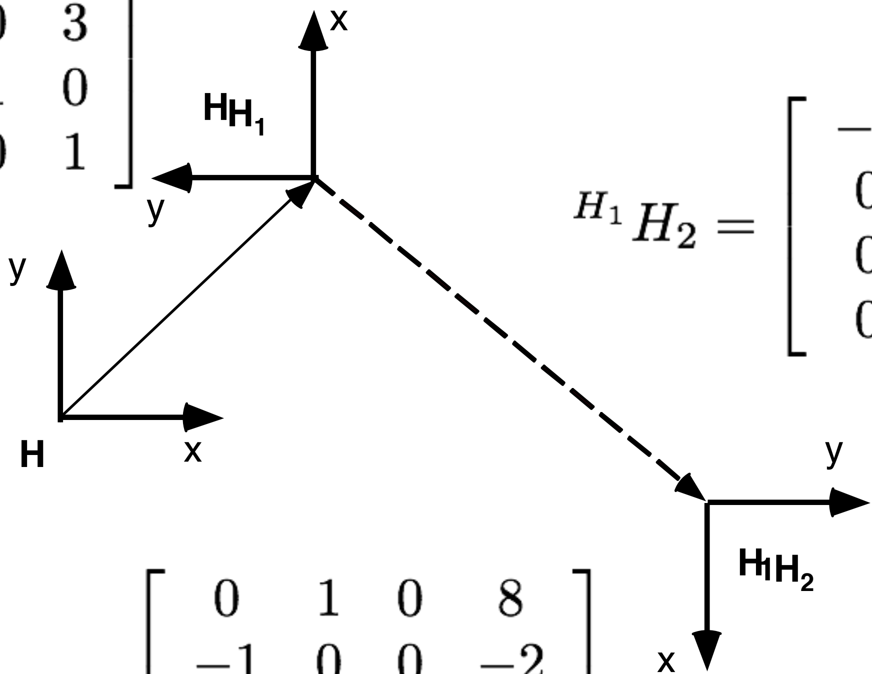
- Gegeben: Punkt $P=(1, 2, 3)^T$ in H_2

Verkettete Lagebeschreibung



Verkettete Lagebeschreibung

$$
{}^{H}H_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$



$$
{}^{H_1}H_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{H}H_2 = {}^{H}H_1 \cdot {}^{H_1}H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Verkettete Lagebeschreibung

Bewertung

- Rotationsmatrizen + Translation:
  - 12 Parameter (9 Rotation, 3 Translation)
  - Hohe Redundanz
  - Interpolation schwierig
- Geht‘s besser?
  - Ja, mit Quaternionen
  - Kompakte Darstellung
  - Erstmals beschrieben von Hamilton 1843
  - Einsatz erst seit den 90er Jahren (Computergraphik)

Quaternionen

Definitionen

- Auffassung als hyperkomplexe Zahlen
- Mit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ Quaternion q wie folgt beschrieben:

$$q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$$

- Mit

$$\begin{aligned} i^2 &= & j^2 &= & k^2 = ijk = -1 \\ ij &= & -ji &= & k \\ jk &= & -kj &= & i \\ ki &= & -ik &= & j \end{aligned}$$

- a ist der **Realteil**, **u** = (b, c, d)^T der **Imaginärteil**
  q = (a, b, c, d)^T oder auch q = (a, **u**)^T

Rechenregeln (1)

- Gegeben $q = (a_q, \mathbf{u}_q), r = (a_r, \mathbf{u}_r)$
- Addition

$$q + r = (a_q + a_r, \mathbf{u}_q + \mathbf{u}_r)$$

- Punktprodukt (Skalarprodukt)

$$q \cdot r = a_q a_r + < \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_r >= a_q a_r + b_q b_r + c_q c_r + d_q d_r$$

- Quaternionen-Multiplikation

$$q * r = (a_q + i \cdot b_q + j \cdot c_q + k \cdot d_q) \cdot (a_r + i \cdot b_r + j \cdot c_r + k \cdot d_r)$$

Rechenregeln (2)

- Konjugierte Quaternion

$$q^* = (a_q, -\mathbf{u}_r)$$

- Norm

$$|q| = \sqrt{qq^*} = \sqrt{q^*q} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

- Multiplikatives Inverses Element

$$q^{-1} = q^* / |q|^2$$

Rotation mit Quaternionen

- Vektor $\mathbf{p} = (x, y, z)^T$ als Quaternion

$$\mathbf{q} = (0, \mathbf{p})^T$$

- Skalar s als Quaternion

$$\mathbf{q} = (s, \mathbf{0})^T$$

- Einheitsquaternion

$$|\mathbf{q}| = 1$$

Rotation mit Quaternionen

- geg. 3-dim. Einheitsvektor **u**, Winkel θ
  dann repräsentiert das Quaternion

$$q = (\cos\theta/2, \mathbf{u}\sin\theta/2)$$

  eine Rotation um θ mit Rotationsachse **u**

- Ein Punkt **v** wird rotiert durch:

$$\mathbf{v}' = qvq^* = qvq^{-1}$$

Beispiel

Punkt $P = (1, 0, 9)^T$

Drehachse $\mathbf{u} = e_x = (1, 0, 0)^T$

Drehwinkel $\theta = 90°$

$q_p = (0, 1, 0, 9)^T = i + 9k$

$q_r = (\cos\ \theta/2, \sin\ \theta/2, 0, 0)^T = \cos\ \theta/2 + i \sin\ \theta/2$

$q_{p'} = q_r q_p q_r^* = (0, 1, -9, 0)^T$

$\Rightarrow \quad p' = (1, -9, 0)^T$

Rotation mit Quaternionen

- Hintereinanderschalten von Rotationen:
  geg.:
  $$q = (\cos\theta_q/2, \mathbf{u}_q \sin\theta_q/2)$$
  $$r = (\cos\theta_r/2, \mathbf{u}_r \sin\theta_r/2)$$
- sowie: $f(v) = qvq^{-1}$ und $h(v) = rvr^{-1}$
- dann entspricht $f \circ h$ gerade der Rotation mit dem Quaternion p = q*r

Bewertung

- Intuitive Darstellung von Rotationen („direkte“ Angabe von Drehwinkel und -achse)
- Kompakte Darstellung (nur 4 Werte im Vergleich zu 9 Werten bei Rot.Matrix)
- Rotation direkt um gewünschte Achse
- Numerische Stabilität

Aber:

- Nur Rotation, keine Translation

Duale Quaternionen

Warum ?

- Reelle Quaternionen eignen sich für die Beschreibung der Orientierung, nicht aber der Lage eines Objektes

- Um neben der Orientierung auch die Lage in einem Quaternion ausdrücken zu können, werden die 4 reellen Werte durch Dualzahlen ersetzt

Duale Quaternionen

Duale Zahlen

- Duale Zahlen sind von der Form

$$d = p + e \cdot s, \quad \text{wobei } e^2 = 0$$

- **Primärteil** p, **Sekundärteil** s

- Ähnlich wie bei komplexen Zahlen lassen sich die üblichen Operationen ableiten

- Seien $d_1 = p_1 + e \cdot s_1$ und $d_2 = p_2 + e \cdot s_2$ duale Zahlen, dann gilt für
  - Addition: $d_1 + d_2 = p_1 + p_2 + e \cdot (s_1 + s_2)$
  - Multiplikation: $d_1 \cdot d_2 = p_1 \cdot p_2 + e \cdot (p_1 \cdot s_2 + p_2 \cdot s_1)$

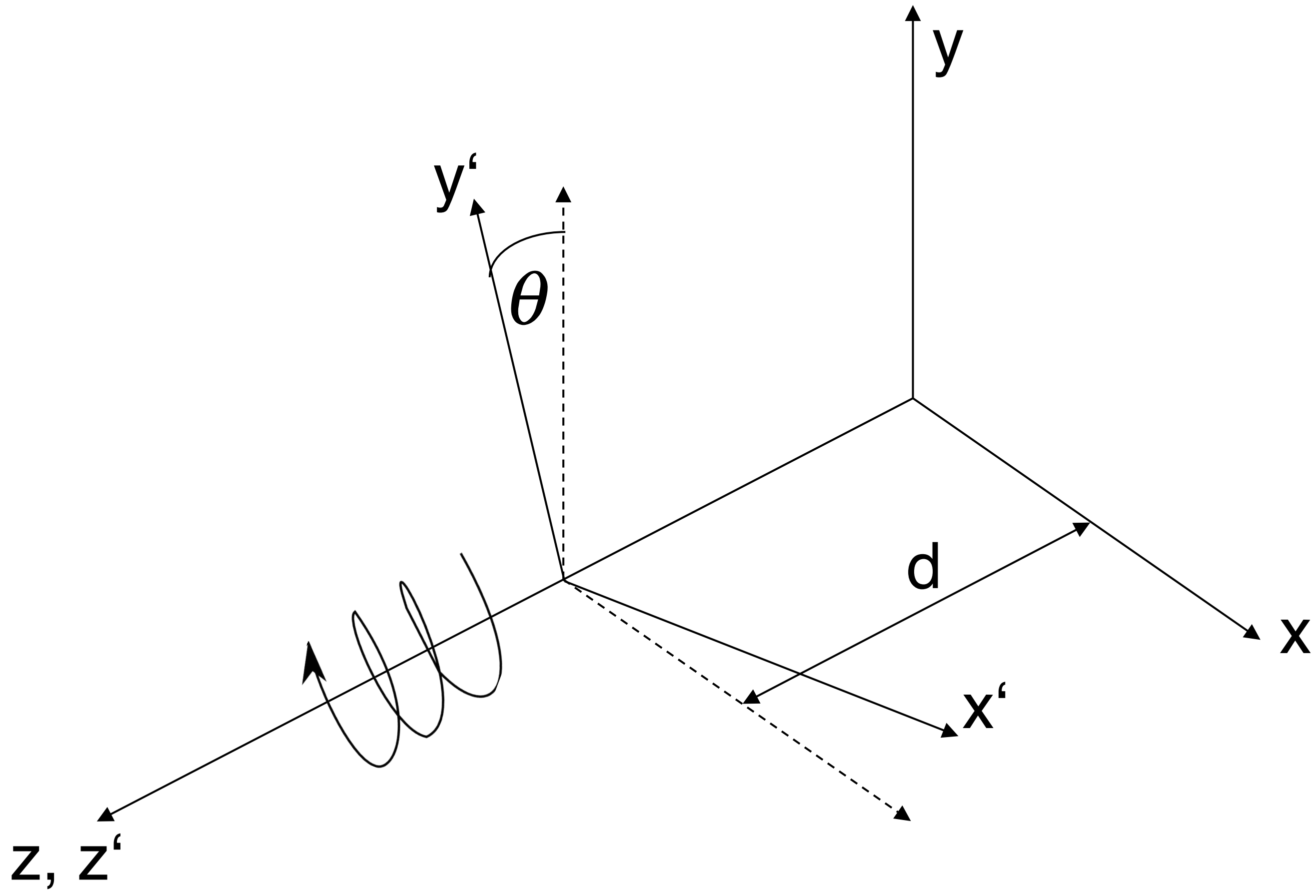
Duale Quaternionen

Beschreibung

$$DQ = (d_1, d_2, d_3, d_4), \qquad d_i = dp_i + e \cdot ds_i$$

- Der reale Skalarteil enthält den **Winkelwert** $\theta/2$ und der imaginäre Skalarteil die **Verschiebungsgröße** d
- Die restliche drei Dualzahlen beschreiben eine **beliebige gerichtete, normierte Gerade** im Raum, bzgl. der die Rotation und Translation erfolgen

Rotation und Translation durch Duale Quaternionen



Duale Quaternionen

Bewertung

- Dualquaternionen sind zur Stellungsbeschreibung eines Objekts geeignet
- Operationen auf Dualquaternionen erlauben auch alle benötigten Transformationen
- Geringe Redundanz, da nur 8 Kenndaten
- Schwierigkeit für den Anwender, eine Stellung durch Angabe einer Dualquaternion zu beschreiben
- Komplexe Verarbeitungsvorschriften (z.B. für Multiplikation)
- In der Regel geringe Anzahl an Einzeloperationen je Rechenoperation

Zusammenfassung

- Rotationsmatrix und Verschiebungsvektor
- Homogene 4x4-Matrix
- Quaternionen
- Duale Quaternionen

- Verschiedene Darstellungsarten um Rotationen und Translationen im euklidischen Raum darzustellen
- Jede Darstellungsart hat spezifische Vor- und Nachteile
- Konkrete Anwendung bestimmt Auswahl der Methode